29/2/16

Πολυώνυμα

$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_i x^i + \ldots + a_n x^n$

x^i μονώνυμο

a_i συντελεστής

$a_i x^i$ όρος

$a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n = b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n$

$a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, $a_n = b_n$

$K[x]$ το σύνολο όλων των πολυωνύμων με συντελεστές από το K.

$f(x) + g(x)$

$f(x) \cdot g(x)$

Έστω $f(x) \in K[x]$ με $f(x) \neq 0$

$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ $a_n \neq 0$

Το n λέγεται βαθμός του $f(x)$ και συμβολίζεται με $\deg(f)$.

Για το μηδενικό πολυώνυμο δεν ορίζεται βαθμός.

$\deg(f(x) \cdot g(x)) = \deg(f(x)) + \deg(g(x))$

$\deg(f(x) + g(x)) \leq \max(\deg f(x), \deg g(x))$

$f(x) = a_0 + \ldots + a_n x^n$ με $a_n \neq 0$

Αν $a_n = 1$ τότε το $f(x)$ λέγεται μονικό

Ορισμός: Λέμε το $g(x)$ διαιρεί το $f(x)$ αν υπάρχει πολυώνυμο $h(x) \in K[x]$ τέτοιο ώστε
$f(x) = g(x) \cdot h(x)$
$g | f$ g διαιρεί το f / f πολλαπλάσιο του g

μη σταθερό
Ορισμός: Ανάγωγο λέγεται ένα πολυώνυμο $p(x) \in K[x]$ αν οι μόνοι διαιρέτες του είναι τα σταθερά πολυώνυμα και πολυώνυμα της μορφής $c \cdot p(x)$.
Δηλαδή αν $p(x) = f(x) \cdot g(x)$ τότε το $f(x)$ είναι σταθερό πολυώνυμο ή το $g(x)$ είναι σταθερό πολυώνυμο.

Ένα πολυώνυμο $p(x)$ δεν είναι ανάγωγο αν μπορεί να γραφεί στον $K[x]$ ως γινόμενο δύο πολυωνύμων $f(x), g(x)$ με $\deg(f(x)) < \deg(p(x))$ και $\deg(g(x)) < \deg(p(x))$
$$p(x) = f(x) \cdot g(x)$$

Παραδείγματα
$(x-1) \in \mathbb{Q}(x)$
$(x-1) = f(x) \cdot g(x)$
$\deg(x-1) = \deg(f(x) \cdot g(x)) = \deg((f(x))) + \deg((g(x)))$

Άρα $\deg(f(x)) + \deg(g(x)) = 1$

$\deg(f), \deg(g) \in \mathbb{N}$
i) $\deg f(x) = 0$ και $\deg g(x) = 1$ Άρα $f(x)$ σταθερό
ii) $\deg f(x) = 1$ και $\deg g(x) = 0$ Άρα $g(x)$ σταθερό

Συνεπώς $(x-1)$ ανάγωγο (το ίδιο και με $(x-a)$)

$x^2+1 \in \mathbb{Q}[x]$ ανάγωγο
$x^2+1 \in \mathbb{C}[x]$

Αν $x^2+1 \in \mathbb{C}[x]$ μπορούμε να πούμε $(x-i)(x+i)$
Αποδεικνύεται (δύσκολα) $x^4-2 \in \mathbb{Q}(x)$ ανάγωγο

Θεώρημα: Κάθε μη σταθερό πολυώνυμο $f(x)=a_0+a_1x+\dots+a_nx^n \in K[x]$ γράφεται με μοναδικό τρόπο ως γινόμενο μιας σταθεράς (των a_n) και μονικών αναγώγων πολυωνύμων του $K[x]$.

$f(x)=a_n\cdot p_1(x)\cdot p_2(x)\dots p_s(x)$

$f(x)=a_n\cdot q_1(x)^{n_1}\cdot q_2(x)^{n_2}\dots q_t(x)^{n_t}$ q_i ανάγωγα και q_i διαφορετικά μεταξύ τους δηλ $q_i\neq q_j$ αν $i\neq j$

Αλγόριθμος διαίρεσης πολυωνύμων
$f(x), g(x) \in K[x]$
$g(x)\neq 0$ υπάρχουν $\pi(x), u(x) \in K[x]$ (πηλίκο, υπόλοιπο) τέτοια ώστε $f(x)=\pi(x)g(x)+u(x)$ και $u(x)=0$ ή $\deg(u(x)) < \deg(g(x))$

Παράδειγμα
$f(x)=2x^5-3x^4+x+1$, $g(x)=x^2+2x-1\neq 0$

$$
\begin{array}{l|l}
2x^5-3x^4 \qquad\qquad +x+1 & x^2+2x-1 \in g(x) \\
\hline
2x^5 \qquad 4x^3-2x^2 & 2x^2-3x-4 \in \pi(x) \\
\hline
-3x^4-4x^3+2x^2+x+1 & \\
-3x^4 \qquad -6x^2+3x & \\
\hline
-4x^3+8x^2-2x+1 & \\
-4x^3 \qquad -8x+4 & \\
\hline
8x^2+6x-34 \; u(x) &
\end{array}
$$

Ρίζα πολυωνύμων

Ορισμός: Έστω $f(x) \in K[x]$ το $\rho \in K$ λέγεται ρίζα του $f(x)$ αν $f(\rho)=0$

Θεώρημα: Έστω $f(x) \in K$. Το $\rho \in K$ είναι ρίζα του $f(x)$ αν και μόνο αν $(x-\rho) \mid f(x)$

$\sqrt{2}$ ρίζα του $x^2-2 \in \mathbb{R}[x]$

ρ είναι ρίζα του $f(x) \Rightarrow f(\rho)=0$

$f(x) = (x-\rho)\pi(x) + u(x)$
$u(x)=0$ ή $\deg(u(x)) < \deg(x-\rho) = 1$

· Έστω $\deg(u(x)) < 1 \Rightarrow u(x)=c \neq 0$ σταθ. πολυώνυμο
$f(x) = (x-\rho)\pi(x) + c$
$0 = f(\rho) = (\rho-\rho)\pi(\rho) + c = 0 + c = c \neq 0$ Άτοπο
Άρα $u(x)=0$, δηλαδή $f(x) = (x-\rho)\cdot\pi(x)$ Άτοπο
$\Rightarrow (x-\rho) \mid f(x)$
$\Leftarrow (x-\rho) f(x) \Rightarrow \exists\, h(x) \in K[x]$ τέτοιο ώστε
$f(x) = (x-\rho)\cdot h(x)$
$f(\rho) = (\rho-\rho)\cdot h(\rho) = 0 \Rightarrow \rho$ ρίζα

Ορισμός: Πολλαπλότητα της ρίζας $\rho \in K$ του πολυωνύμου $f(x) \in K[x]$ λέγεται ο εκθέτης του $(x-\rho)$ στην ανάλυση
$f(x) = a_n \cdot P_1^{n_1}(x) \cdot P_2^{n_2}(x) \cdots P_t^{n_t}(x)$
P_i ανάγωγα και $P_i \neq P_j$

Παραδείγματα

$f(x) = (x-1)^3(x-2)(x-3)^4$

$g(x) = (x-1)(x-2)(x+1)(x-1)^2 = (x-1)^3(x-2)(x+1)$

$h(x) = (x^2-1)^2(x-1)(x+2) = (x-1)^2(x+1)^2(x-1)(x+2) = (*)$

Η πολλαπλότητα της ρίζας 1 του $f(x)$ είναι 3

$g(x)$ είναι 3.

$* \ (x-1)^3(x+1)^2(x+2)$

Θεώρημα: Έστω $f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_n x^n \in \mathbb{Z}[x]$ $\quad r,s \in \mathbb{Z}$

Αν το κλάσμα $r/s \in \mathbb{Q}$ με $Μ.Κ.Δ.(r,s) = 1$ είναι ρίζα του $f(x)$ τότε $r | \alpha_0$ και $s | \alpha_n$.

$f(x) = 6x^5 - 7x^4 + 2015x^3 - 5x + 7$

Αν $r, s \in \mathbb{Z}$ και r/s ρίζα του $f(x)$ $Μ.Κ.Δ(r,s) = 1$

$r|7 \quad r \in \{1, 7, -1, -7\}$

$s|6 \quad s \in \{1, 2, 3, 6\}$

Πιθανές ρίζες $\left\{ \frac{1}{1}, \frac{7}{1}, \frac{-1}{1}, \frac{-7}{1}, \frac{1}{2}, \frac{7}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{-7}{2}, \frac{1}{3}, \frac{7}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{-7}{3}, \frac{1}{6}, \frac{7}{6}, \frac{-1}{6}, \frac{-7}{6} \right\}$

Ελέγχω $f(1) \dots$

$f(7) \dots$ κτλ

Πίνακες και πολυώνυμα

$A \in K^{n \times n}$ και $f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_m x^m$

$f(A) \in K^{n \times n}$

$f(A) = a_0 I_{n \times n} + a_1 \cdot A + a_2 A^2 + \dots + a_m A^m \in K^{n \times n}$

Γραμμικές απεικονίσεις και πολυώνυμα

$V \xrightarrow{T} V \quad f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$

$V \xrightarrow{T} V \xrightarrow{T} V$

$T^2 = T \circ T$ γραμμική

$T^3 = T \circ T \circ T$

$T^n = \underbrace{T \circ T \circ T \dots \circ T}_{n \text{ φορές}}$

$f(T) : V \to V$

$f(T) = a_0 \cdot I_V + a_1 \cdot T + a_2 \cdot T^2 + a_3 T^3 + \dots + a_n T^n$

$f(T)$ γραμμική απεικόνιση

$V \xrightarrow{T} V$

$\alpha = \{\vec{a_1}, \dots \vec{a_m}\} \quad \alpha = \{\vec{a_1}, \dots \vec{a_m}\}$

$[T]_\alpha^\alpha = A$

$f(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_n x^n$

$[f(T)]_\alpha^\alpha = [b_0 I_V + b_1 \cdot T + b_2 \cdot T^2 + \dots + b_n T^n]_\alpha^\alpha$

$[T_1 + T_2]_\alpha^\alpha = [T_1]_\alpha^\alpha + [T_2]_\alpha^\alpha$

àeq $[f(T)]_\alpha^\alpha = [b_0 I_V]_\alpha^\alpha + [b_1 \cdot T]_\alpha^\alpha + [b_2 T^2]_\alpha^\alpha + \dots + [b_n T^n]_\alpha^\alpha =$

ιsχιγ $[\lambda f]_\alpha^\alpha = \lambda [f]_\alpha^\alpha$ àeq

$= \cancel{b_0 \cdot [I_V]_\alpha^\alpha + b_1 [T]_\alpha^\alpha + b_2 [T]_\alpha^\alpha + \dots + b_n [T]}$

$= b_0 [I_V]_\alpha^\alpha + b_1 [T]_\alpha^\alpha + b_2 [T \circ T]_\alpha^\alpha + b_3 [T \circ T \circ T]_\alpha^\alpha + b_n [T^n]$

$= b_0 \cdot I_{m \times m} + b_1 A + b_2 [T]_\alpha^\alpha [T]_\alpha^\alpha + b_3 [T]_\alpha^\alpha [T]_\alpha^\alpha [T]_\alpha^\alpha + b_n \underbrace{[T]_\alpha^\alpha \cdots [T]_\alpha^\alpha}_{n \text{ φeφi)}}$

$= b_0 \cdot I_{m \times m} + b_1 \cdot A + b_2 \cdot A^2 + b_3 A^3 + \dots + b_n A^n$

$= f(A)$

àeu $[f(T)]_\alpha^\alpha = f(A)$